第 39 講　数列(4)

例題 39 ― 1

すべての自然数 n に対して，次の等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ.

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 39 ー 1

n が自然数のとき，数学的帰納法を用いて次の等式を証明せよ．

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 39 ー 2

n を2以上の自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 39 ー 2

n を 4 以上の自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

$$2^n > 3n + 1$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 39 － 3

$a_1=2$，$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，その結果を数学的帰納法によって証明せよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 39 − 3

$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2-1}{n+1}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，その結果を数学的帰納法によって証明せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 39 ー 4

偶数の数列　2，4，6，8，…… を，第 n 群が n 個の偶数を含むように分ける．

$2 \mid 4,\ 6 \mid 8,\ 10,\ 12 \mid 14,\ 16,\ 18,\ 20 \mid 22,\ \cdots\cdots$

(1)　第 n 群の最後の偶数を求めよ．　(2)　第 n 群の最初の偶数を求めよ．

(3)　150 は第何群の何番目の数か．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題39－4

奇数の数列　1, 3, 5, 7, …… を，第 n 群が 2^{n-1} 個の奇数を含むように分ける．

1 | 3, 5 | 7, 9, 11, 13 | 15, 17, 19, ……, 29 | 31, ……

(1)　第 n 群の最後の奇数を求めよ．　(2)　第 n 群の最初の奇数を求めよ．

(3)　77 は第何群の何番目の数か．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第39講　数列(4)

$a_1=4,\ a_{n+1}=\dfrac{4}{n+1}+\dfrac{1}{a_n}$ ……①で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう.

$a_2=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ a_3=\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$ であることから, $a_n=\left(\dfrac{n+\boxed{カ}}{n}\right)^2$ ……② と推測される.

[Ⅰ]　$n=1$ のとき　②は明らかに成り立つ.

[Ⅱ]　$n=k$ のとき　②が成り立つと仮定すると　$a_k=\left(\dfrac{k+\boxed{カ}}{k}\right)^2$

このとき　①より　$a_{k+1}=\dfrac{4}{k+1}+\dfrac{1}{a_k}=\left(\dfrac{k+\boxed{キ}}{k+\boxed{ク}}\right)^2$　より

②は $n=k+1$ のときも成り立つ.

[Ⅰ], [Ⅱ] より数学的帰納法から，すべての自然数 n で②が成り立つ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 39 講　数列(4)

例題 39 ー 1

すべての自然数 n に対して，次の等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ.

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \quad \cdots\cdots①$$

[1]　$n=1$ のとき　(左辺)$=1^3=1$　(右辺)$=\left\{\frac{1\cdot 2}{2}\right\}^2=1$　より　①は成り立つ.

[2]　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$$

このとき

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+k^3+(k+1)^3$$

$$=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+(k+1)^3=\frac{1}{4}k^2(k+1)^2+(k+1)^3$$

$$=\frac{1}{4}(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}=\frac{1}{4}(k+1)^2(k+2)^2=\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$$

よって，$k=n+1$ のときも①は成り立つ.

[1]，[2]より，すべての自然数 n に対して①は成り立つ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 39 ー 1

n が自然数のとき，数学的帰納法を用いて次の等式を証明せよ．

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$　……①

[1]　$n=1$ のとき　(左辺)$=1\cdot2=2$　(右辺)$=\dfrac{1}{3}\cdot1\cdot2\cdot3=2$　より　①は成り立つ．

[2]　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

このとき

$$\begin{aligned}&1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)\\&=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)\\&=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{1}{3}(k+1)\{(k+1)+1\}\{(k+1)+2\}\end{aligned}$$

よって，$k=n+1$ のときも①は成り立つ．

[1]，[2]より，すべての自然数 n に対して①は成り立つ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 39 ー 2

n を 2 以上の自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1} \quad \cdots\cdots①$$

［1］　$n=2$ のとき　　(左辺)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$　　(右辺)$=\frac{2\cdot 2}{2+1}=\frac{4}{3}$　より　①は成り立つ．

［2］　$k\geqq 2$ として，$n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$$

$n=k+1$ のとき　①において (左辺)－(右辺) を計算すると

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}$$

$$=\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}$$

$$=\frac{(2k+1)(k+2)-2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$$

よって　$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$　より　$n=k+1$ のときも①は成り立つ．

［1］，［2］より，$n\geqq 2$ であるすべての自然数において①は成り立つ．

類題 39 ー 2

n を 4 以上の自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

$$2^n>3n+1$$

$2^n>3n+1 \quad \cdots\cdots①$

［1］　$n=4$ のとき　　(左辺)$=2^4=16$　　(右辺)$=3\cdot 4+1=13$　より　①は成り立つ．

［2］　$k\geqq 4$ として，$n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると

$$2^k>3k+1$$

$n=k+1$ のとき　①において (左辺)－(右辺) を計算すると

$$2^{k+1}-\{3(k+1)+1\}=2\cdot 2^k-(3k+4)>2\cdot(3k+1)-(3k+4)$$

$$=3k-2>0$$

よって　$2^{k+1}>\{3(k+1)+1\}$　より　$n=k+1$ のときも①は成り立つ．

［1］，［2］より，$n\geqq 4$ のすべての自然数において①は成り立つ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 39 ー 3

$a_1=2$，$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，その結果を数学的帰納法によって証明せよ．

(1)　$a_2=2-\dfrac{1}{2}=\mathbf{\dfrac{3}{2}}$，　$a_3=2-\dfrac{2}{3}=\mathbf{\dfrac{4}{3}}$，　$a_4=2-\dfrac{3}{4}=\mathbf{\dfrac{5}{4}}$

(2)　(1)より　$a_n=\dfrac{n+1}{n}$　……①　と推測される．これを数学的帰納法で証明する．

［1］　$n=1$ のとき　①は明らかに成り立つ．

［2］　$n=k$ のとき　①が成り立つと仮定すると　$a_k=\dfrac{k+1}{k}$

$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ より　$a_{k+1}=2-\dfrac{1}{a_k}=2-\dfrac{k}{k+1}=\dfrac{2(k+1)-k}{k+1}=\dfrac{k+2}{k+1}$

よって　$n=k+1$ のときも①は成り立つ．

［1］，［2］より，すべての自然数において①は成り立つ．

類題 39 ー 3

$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2-1}{n+1}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，その結果を数学的帰納法によって証明せよ．

(1)　$a_2=\dfrac{3^2-1}{1+1}=\mathbf{4}$　　$a_3=\dfrac{4^2-1}{2+1}=\mathbf{5}$　　$a_4=\dfrac{5^2-1}{3+1}=\mathbf{6}$

(2)　(1)より　$a_n=n+2$　……①　と推測される．

［1］　$n=1$ のとき　①は明らかに成り立つ．

［2］　$n=k$ のとき　①が成り立つと仮定すると $a_k=k+2$

$a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2-1}{n+1}$　より

$a_{k+1}=\dfrac{{a_k}^2-1}{k+1}=\dfrac{(k+2)^2-1}{k+1}=\dfrac{k^2+4k+3}{k+1}=\dfrac{(k+1)(k+3)}{k+1}=k+3$

よって　$n=k+1$ のときも①は成り立つ．

［1］，［2］より，すべての自然数において①は成り立つ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 39 ー 4

偶数の数列　2, 4, 6, 8, …… を，第 n 群が n 個の偶数を含むように分ける.

$2\,|\,4,\ 6\,|\,8,\ 10,\ 12\,|\,14,\ 16,\ 18,\ 20\,|\,22,\ \cdots\cdots$

(1)　第 n 群の最後の偶数を求めよ.　(2)　第 n 群の最初の偶数を求めよ.

(3)　150 は第何群の何番目の数か.

もとの数列の一般項は　$2n$

(1)　第 n 群の末項までにある偶数の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

よって第 n 群の最後の偶数は，もとの数列の第 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 項.

したがって，求める数は　$2\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}=\boldsymbol{n^2+n}$

(2)　$n\geqq 2$ のとき，第 $n-1$ 群の最後の偶数は，もとの数列の第 $\frac{1}{2}(n-1)n$ 項.

よって，第 n 群の最初の偶数は，もとの数列の第 $\frac{1}{2}(n-1)n+1$ 項.

したがって，求める数は　$2\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}=(n-1)n+2=\boldsymbol{n^2-n+2}$

これは $n=1$ のときも成り立つ.

(3)　$2n=150$ より　$n=75$　　よって　150 はもとの数列の第 75 項

150 が第 n 群に属するとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n<75\leqq\frac{1}{2}n(n+1)\qquad (n-1)n<150\leqq n(n+1)$$

$11\times 12=132,\ 12\times 13=156$　より　これを満たす自然数 n は $n=12$

よって，150 は第 12 群に属する.

第 11 群の最後の偶数は，もとの数列の第 $\frac{1}{2}\cdot 11\cdot 12$ 項　つまり　第 66 項.

よって，150 は**第 12 群の 9 番目の数**.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 39 − 4

奇数の数列　1，3，5，7，…… を，第 n 群が 2^{n-1} 個の奇数を含むように分ける．

　1 | 3，5 | 7，9，11，13 | 15，17，19，……，29 | 31，……

(1)　第 n 群の最後の奇数を求めよ．　(2)　第 n 群の最初の奇数を求めよ．

(3)　77 は第何群の何番目の数か．

もとの数列の一般項は　$2n-1$

(1)　第 n 群の末項までにある奇数の個数は

$$1+2+4+\cdots\cdots+2^{n-1}=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$$

よって第 n 群の最後の奇数は，もとの数列の第 2^n-1 項．

したがって，求める数は　$2(2^n-1)-1=\mathbf{2^{n+1}-3}$

(2)　$n\geqq 2$ のとき，第 $n-1$ 群の最後の奇数は，もとの数列の第 $2^{n-1}-1$ 項．

よって，第 n 群の最初の奇数は，もとの数列の第 $(2^{n-1}-1+1)$ 項，つまり第 2^{n-1} 項．

したがって，求める数は　$2\cdot 2^{n-1}-1=\mathbf{2^n-1}$

これは $n=1$ のときも成り立つ．

(3)　$2n-1=77$ より　$n=39$　　よって　77 はもとの数列の第 39 項．

77 が第 n 群に属するとすると

$2^{n-1}-1<39\leqq 2^n-1$　　$2^{n-1}<40\leqq 2^n$

$2^5=32$，$2^6=64$　より　これを満たす自然数 n は　$n=6$

よって，77 は第 6 群に属する．

第 5 群の最後の奇数は，もとの数列の第 2^5-1 項　つまり　第 31 項．

よって，77 は**第 6 群の 8 番目の数**．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第39講　数列(4)

$a_1=4,\ a_{n+1}=\dfrac{4}{n+1}+\dfrac{1}{a_n}$ ……①で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう.

$a_2=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ a_3=\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$ であることから, $a_n=\left(\dfrac{n+\boxed{カ}}{n}\right)^2$ ……② と推測される.

［Ⅰ］ $n=1$ のとき　②は明らかに成り立つ.

［Ⅱ］ $n=k$ のとき　②が成り立つと仮定すると　$a_k=\left(\dfrac{k+\boxed{カ}}{k}\right)^2$

このとき　①より　$a_{k+1}=\dfrac{4}{k+1}+\dfrac{1}{a_k}=\left(\dfrac{k+\boxed{キ}}{k+\boxed{ク}}\right)^2$　より

②は $n=k+1$ のときも成り立つ.

［Ⅰ］,［Ⅱ］より数学的帰納法から，すべての自然数 n で②が成り立つ.

解答例

$a_2=\dfrac{4}{1+1}+\dfrac{1}{a_1}=2+\dfrac{1}{4}=\mathbf{\dfrac{9}{4}}$　　$a_3=\dfrac{4}{2+1}+\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{9}=\mathbf{\dfrac{16}{9}}$

$a_4=\dfrac{4}{3+1}+\dfrac{1}{a_3}=1+\dfrac{9}{16}=\dfrac{25}{16}$　　よって　$a_n=\left(\dfrac{n+\mathbf{1}}{n}\right)^2$ ……②　と推測される.

［Ⅰ］ $n=1$ のとき　②は明らかに成り立つ.

［Ⅱ］ $n=k$ のとき　②が成り立つと仮定すると　$a_k=\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^2$

このとき　①より

$$a_{k+1}=\frac{4}{k+1}+\frac{1}{a_k}=\frac{4}{k+1}+\left(\frac{k}{k+1}\right)^2$$

$$=\frac{4(k+1)+k^2}{(k+1)^2}=\frac{(k+2)^2}{(k+1)^2}=\left(\frac{k+\mathbf{2}}{k+\mathbf{1}}\right)^2$$　より

②は $n=k+1$ のときも成り立つ.

［Ⅰ］,［Ⅱ］より数学的帰納法から，すべての自然数 n で②が成り立つ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。